

المعادلة التفاضلية الخطية غير متجانسة من الرتبة n ودوائع معاملات ثابتة:

الشكل العام للمعادلة هو:

$$(1) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

وهذه المعادلة تكتب باستخدام المؤثر التفاضلي D على التواليف:

$$(2) \quad (D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = f(x)$$

أو اختصاراً على التواليف:

(3)

$$\phi(D) \cdot y = f(x)$$

$$\phi(D) = \sum_{j=0}^n a_j D^j$$

$$a_n = 1$$

ولاستناداً إلى الفصل الأول فيكون الحل العام لهذه المعادلة هو $y = y_h + y_p$

حيث y_h هو الحل العام للمعادلة $\phi(D)y = 0$

و y_p هو حل خاص للمعادلة (3)

ويمكن إيجاد هذا الحل باستخدام إحدى الطرق الآتية:

أولاً: طريقة المعاملات غير المعينة:

هذه الطريقة تعارض بسلطة وصحتها لكن يعيبها بأنها تتولى العمل على أنواع متعددة لدالة $f(x)$ وهذه الطريقة تخمينية لكن مع أنفا تخمينية توجد طرؤوايط متعددة لهذه الطريقة.

مثال: اعتماداً على طريقة معاملات غير المعينة أوجد حلًا خاصاً للمعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

لنقترح حلًا خاصاً من الشكل:

$$y_p = \beta \cdot x^2$$

حيث β المعامل غير المعين الذي علينا تحديده، ولتعيين هذا المعامل نشتق من الحل المقترح مرتين متتاليتين:

$$y_p' = 2\beta x \quad , \quad y_p'' = 2\beta$$

SUBJECT: _____

نعوض في المعادلة التفاضلية المطارة.

$$2\beta - 3(2\beta)x + 2\beta x^2 = x^2$$

$$2\beta x^2 - 6\beta x - 2\beta = x^2$$

بالمطابقة نجد أن

$$2\beta = 1, \quad -6\beta = 0, \quad 2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta = 0$$

نلاحظ أن العامل β أخذ قيمتين مختلفتين بأن واحد صا $\beta = \frac{1}{2}$ ، $\beta = 0$ وهذا غير ممكن.

لنعوم الآن بتقدير الحل الخاص المقترح.
نقترح الحل الخاص من الشكل $y_p = B_2 x^2 + B_1 x + B_0$ حيث B_2, B_1, B_0 هي المعاملات التي يراد تعيينها لتقريباً نستنتج وأطابق:

$$y_p' = 2B_2 x + B_1 \Rightarrow y_p'' = 2B_2$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المطارة فتجد أن:

$$2B_2 - 3(2B_2 x + B_1) + 2(B_2 x^2 + B_1 x + B_0) = x^2$$

$$2B_2 x^2 + (-6B_2 + 2B_1)x + (2B_2 - 3B_1 + 2B_0) = x^2$$

بالمطابقة نجد:

$$2B_2 = 1, \quad -6B_2 + 2B_1 = 0, \quad 2B_2 - 3B_1 + 2B_0 = 0$$

عدد المعادلات بعضنا المطابقة ياردي عدد المعادلات

$$B_2 = \frac{1}{2}, \quad B_1 = -\frac{3}{2}, \quad B_0 = \frac{7}{4}$$

ومن ثم فإن

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

هو الحل الخاص المطلوب

مثال 2: وفق طريقة المعاملات غير المحددة أو جد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$y'' + 2y' + 2y = \sin x$$

نقترح حلاً خاصاً من الشكل: $y_p = B \sin x$; B معامل يراد تعيينه

لتعريف B نستنتج ونعوض في المعادلة

$$y_p' = B \cdot \cos x \quad ; \quad y_p'' = -B \sin x$$

نوضف في المعادلة نجد أن :

$$-B \sin x + B \cos x + B \sin x = \sin x$$

$$B \sin x + B \cos x = \sin x = 1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x$$

$$B=0 \quad , \quad B=1 \quad \text{بالمطابقة نجد أن}$$

نلاحظ بأن B أخذ قيمتين مختلفتين بأن واحد وهذا مرفوض نتوهم نغير حل خاص جديداً .

$$y_p = B_1 \sin x + B_2 \cos x$$

$$y_p' = B_1 \cos x - B_2 \sin x$$

$$y_p'' = -B_1 \sin x - B_2 \cos x$$

نوضف في المعادلة القاطبة المعطاة فنجد :

$$-B_1 \sin x - B_2 \cos x + B_1 \cos x - B_2 \sin x + 2B_1 \sin x + 2B_2 \cos x = \sin x$$

$$(-B_1 - B_2 + 2B_1) \sin x + (-B_2 + B_1 + 2B_2) \cos x = \sin x$$

$$(B_1 - B_2) \sin x + (B_1 + B_2) \cos x = \sin x$$

$$B_1 - B_2 = 1$$

$$B_1 + B_2 = 0$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad B_1 = \frac{1}{2}$$

نحل جملة طائفة المعادلتين نجد أن
ومن هنا الحل الخاص يكون :

$$y_p = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

$$y'' - y' + 2y = e^x$$

مثال 3 : أوجد الحل الخاص للمعادلة :

لنفترض هنا خاصاً من الشكل $y_p = B \cdot e^x$ و B معامل يرد بقيمته لذلك
نشتق مرتين فنجد أن :

$$y_p' = B \cdot e^x \quad ; \quad y_p'' = B \cdot e^x$$

$$B e^x - B e^x + 2B e^x = e^x$$

$$2B e^x = e^x \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$y_p = \frac{1}{2} e^x$$

* من خلال الأمثلة الثلاث السابقة نلاحظ ما يلي :
- من خلال المثال الأول لاحظنا أننا في الاقتراح الأول أخطأنا في الاقتراح.
نفسر قدره .

- أمثلة المثال الثاني أيضاً أحققنا ويتم أيضاً فديلاً .
- في المثال الثالث لم نحصل وكان الحل ~~الخاص~~ هو الحل الخاص المطلوب
لماذا ؟

ستوضح القاعدة الخاطئة .

خاص

- القاعدة الأصلية لقراءة طريقة حل المعادلات غير المتجانسة :
لا اقتراح حل خاص لمعادلة تفاضلية معطاة ذات معاملات ثابتة توجد الحل العام
للبيان .

$$1. \quad y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$M^2 - 3M + 2 = 0$$

$$M = 1, M = 2$$

$$y_h = A_1 e^x + A_2 e^{2x}$$

$$2. \quad y'' + y' + 2y = \sin x$$

$$M^2 + M + 2 = 0$$

$$\Delta = -7 \quad M_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$$

$$M_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + A_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right)$$

$$3. \quad y'' - y' + 2y = e^x$$

$$M^2 - M + 2 = 0$$

$$\Delta = -7$$

$$M_1 = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}$$

$$M_2 = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2}$$

$$y_h = e^{\frac{1}{2}x} \left[A_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + A_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right]$$

نلاحظ بالخط الثالث السابقة نوجد الحل العام ونفرض حل خاص يتكون من الدالة $f(x)$ وجميع المشتقات العليا لهذا الدالة فنحن المثال الأول $x^2 = x^2$ اقترحنا الحل الخاص x^2 وفي المثال الثاني $f(x) = \sin x$ اقترحنا الحل الخاص $\sin x$ وفي المثال الثالث $f(x) = e^x$ اقترحنا الحل الخاص e^x لذلك لنأخذ في الحل الخاص e^x .

ملاحظة: أما إذا وجدنا اشتراك بين الدالة $f(x)$ والحل العام للمعادلة المتجانسة المناظرة $y'' + 4y = 0$ عندئذٍ نتبع ما يلي:

- 1- نفرض الحل الخاص ونضع القاعدة الأساسية.
- 2- بعد ذلك ضرب الجزء المشترك من الحل الخاص بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاشتراك.

مثال: لكن لدينا المعادلة: $y'' + 4y = \cos 2x$
اقترح حلًا خاصًا للمعادلة:

$$y'' + 4y = 0$$

$$M^2 + 4 = 0 \Rightarrow M^2 = -4 \Rightarrow M = \pm 2i$$

$$M_1 = 2i \quad M_2 = -2i$$

$$y_h = A_1 \cos 2x + A_2 \sin 2x$$

نفرض حلًا خاصاً وفق القاعدة الأساسية فيكون هو الشكل:

$$y_p = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$$

نلاحظ بأنه يوجد اشتراك بين y_p و y_h تزيد هذا الاشتراك بأن نضرب جزء المشترك من y_p بأقل قوة لـ x تزيد هذا الاشتراك عندئذٍ يكون الحل الخاص المقترح هو الشكل:

$$y_p = B_1 x \cos 2x + B_2 x \sin 2x$$

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \cos 2x = \frac{x}{2 \cdot 4} \sin 2x = -\frac{x}{4} \sin 2x$$

نشتق هذا الحل الخاص مقترح بعد التعديل عدد من المرات ليأخذ رتبة المعادلة التفاضلية ونطابقه لنعين كلاً من β_1 و β_2 .

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -\frac{1}{4}$$

مثال ١

امترح حلاً خاصاً ونقه طريقة المعادلات غير المعينة دون تعيين المعاملات.

$$y'' + 4y' = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة

$$y_p = \beta_1 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \beta_3 e^{2x} + \beta_4 x^2 + \beta_5 x + \beta_6$$

نضرب مصفوفة المتكامل من y بأقل قوة لـ x نزيل هذا الاشتراك نكون

$$y_p = \beta_1 x \cos 2x + \beta_2 x \sin 2x + \beta_3 e^{2x} + \beta_4 x^2 + \beta_5 x + \beta_6$$

ثانياً: طريقة المؤثر التفاضلي العكسي:

إذا كانت لدينا المعادلة التفاضلية $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ نجد الحل الخاص ونقتطع طريقة المؤثر التفاضلي العكسي ماعلياً إلى أن تؤثر على طرفي المعادلة بالمؤثر التفاضلي العكسي فإن الحل الخاص هو $y_p = \frac{1}{D^2 + pD + q} f(x)$

نستأخذ هذه الطريقة بأنها أسرع الطرق ونطابقها عندنا تكون جافظين الخواص. يعيها بأنها لا تصلح إلا لدرجات التفاضل بعدد منته من المشتقات العليا. كما أنه هذه الطريقة لا يمكن استخدامها إذا كانت المعادلة ذات معاملات متغيرة. لا يمكن استخدامها.

SUBJECT: _____

$$4y'' + 4y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

أنشطة:
كيجاد الحل الخاص

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي المعكوس متجانس

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} (\cos 2x + e^{2x} + x^2)$$

$$= \frac{1}{D^2 + 4} \cdot \cos 2x + \frac{1}{D^2 + 4} e^{2x} + \frac{1}{D^2 + 4} x^2$$

$$\frac{1}{D^2 + 4} \cdot \cos 2x = -\frac{x}{2 \cdot 4} \sin 2x = -\frac{x}{4} \sin 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + 4} \cdot e^{2x} &= \frac{1}{8} e^{2x} \quad ; \quad \frac{1}{D^2 + 4} x^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} D^2} x^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} D^2 \right) x^2 = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$y_p = -\frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8}$$

-2-

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y'' - 4y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

دفع المؤثر التفاضلي المعكوس

أرغب: دفع طريقة المعادلات التفاضلية

$$y'' - 4y = 0$$

$$M^2 - 4 = 0 \Rightarrow M^2 = 4 \Rightarrow M_1 = 2, M_2 = -2$$

$$y_h = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-2x}$$

الحل الخاص

$$y_p = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x + B_3 e^{2x} + B_4 x^2 + B_5 x + B_6$$

نلاحظ أنه يوجد اشتراك بين y_h و y_p والمثل المشترك هو e^{2x} فنضرب المثل المشترك من y_p بأقل قوة لـ x تزيد الاشتراك فنصبح المثل الخاص المقترح هو:

$$y_p = B_1 \cdot \cos 2x + B_2 \cdot \sin 2x + B_3 x \cdot e^{2x} + B_4 x^2 + B_5 x + B_6$$

المثل وفق الخوارزمية العكسية:

$$(D^2 - 4)y = \cos 2x + e^{2x} + x^2$$

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4} (\cos 2x + e^{2x} + x^2)$$

$$= \frac{1}{D^2 - 4} \cdot \cos 2x + \frac{1}{D^2 - 4} e^{2x} + \frac{1}{D^2 - 4} x^2$$

$$\frac{1}{D^2 - 4} \cdot \cos 2x = -\frac{1}{8} \cos 2x$$

$$\frac{1}{D^2 - 4} \cdot e^{2x} = \frac{x \cdot e^{2x}}{4}$$

$$\psi(0) = D^2 - 4 \Rightarrow \psi(2) = 0$$

$$\psi(0) = 2D \Rightarrow \psi'(2) = 4$$

$$\frac{1}{D^2 - 4} x^2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} D^2} x^2 = -\frac{1}{4} (1 + \frac{1}{4} D^2) x^2 = -\frac{1}{4} (x^2 + \frac{1}{2})$$

$$y_p = -\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{x e^{2x}}{4} - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8}$$

النتيجة: طريقة غرانيغ أو التوابل المقترنة:

ونجدنا بأن المثل الخاص وفق هذه الطريقة يعطى بالعلاقة:

$$y_p = y_1 \int \frac{y_2}{y_1^2} dx + y_2 \int \frac{y_1}{y_1^2} dx$$

تتحدد بأنها تطبق لحالات أنواع الدوال أيًا كانت $f(x)$ سواء أن هذه الطريقة تطبق للمعادن

التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة والمقترنة

وما إذا تزداد صعوبة كلما ارتفعت رتبة المعادلة، كما أنه عند حساب تكاملات الموجودة في الطرفين الأيمن قد يضاف تكاملات كما يمكن حلها بطريقة التي تعلمها مثلاً قد يكون $\int e^{x^2} dx$ أو $\int \frac{\sin x}{x} dx$

مثالاً أوجد الحل العام $y'' - 4y = e^{2x}$

الحل العام المتجانس هو $y_h = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-2x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{2x} \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ e^{2x} & -2e^{2x} \end{vmatrix} = -1$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

$$y_p = e^{2x} \int \frac{-1}{-4} dx + e^{-2x} \int \frac{e^{4x}}{-4} dx$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{2x} \int dx - \frac{e^{-2x}}{4} \int e^{4x} dx$$

$$y_p = \frac{1}{4} e^{2x} x - \frac{1}{16} e^{2x}$$

$$y_p = \frac{x}{4} e^{2x}$$

ناتج لبقه

الفرد بين الناتجين هو $-\frac{1}{16} e^{2x}$ لكن بما أن

$$(D^2 - 4) \left(-\frac{1}{16} e^{2x} \right) = -\frac{1}{16} (D^2 - 4) e^{2x} = -\frac{1}{16} (4 - 4) e^{2x} = 0$$

ملحوظة: إذا كان لدينا معادلة تفاضلية

$$\psi(D) \cdot y = F(x)$$

وكان أوتج

$$F(x) = x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x + a_0$$

عندئذ يكون الشكل المقترح من الشكل:

$$y_p = B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0$$

الانعدام احد المعاملات a_0, a_1, \dots, a_{n-1} فيكون بضرورة انعدام المعامل المقابل للحل الخاص المقترح.

$$F(x) = e^{mx}$$

ثانياً إذا كان

$$y_p = 0 \cdot e^{mx}$$

الحل الخاص المقترح

$$F(x) = b_1 \cos px + b_2 \sin px$$

ثالثاً إذا كان

فإن الحل الخاص المقترح يكون من الشكل:

$$y_p = B_1 \cos px + B_2 \sin px$$

رابعاً إذا كان

$$F(x) = e^{mx} (a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

فإن الحل الخاص المقترح يكون:

$$y_p = e^{mx} (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0)$$

خامساً إذا كان

$$F(x) = e^{mx} (b_1 \cos px + b_2 \sin px)$$

الحل الخاص المقترح يكون من الشكل:

$$y_p = e^{mx} (B_1 \cos px + B_2 \sin px)$$

سادساً إذا كان

SUBJECT:

$$F(x) = e^{\alpha x} [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0] + (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0) \cdot \sin \beta x$$

الحل الخاص المقترح يكون

$$y_p = e^{\alpha x} (D_n x^n + D_{n-1} x^{n-1} + \dots + D_1 x + D_0) \cos \beta x + (E_n x^n + \dots + E_1 x + E_0) \sin \beta x$$

سابقة إذا كان $F(x) = A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x$ عندئذٍ الحل الخاص المقترح يكون من الشكل:

$$y_p = \beta_1 \sin x + \beta_2 \cos x$$

التمرين 1: اجمع تركيب من الحالات السابقة ~~التي~~ بناءً على الخاص المقترح يكون تركيب من الحالات المقابلة:

$$F(x) = x + x^2 \cdot e^{2x} + \sin x$$

$$y_p = (\beta_1 x + \beta_0) + (\beta_2 x^2 + \beta_3 x + \beta_4) e^{2x} + \beta_5 \sin x + \beta_6 \cos x$$